Egzamin z matematyki dyskretnej

23 czerwca 2023 r.

Część teoretyczna

Podaj definicje i sformułowania następujących pojęć i twierdzeń (występujące w nich oznaczenia proszę też zdefiniować) oraz odpowiedz na zadane pytania, podając krótkie uzasadnienia.

1. Wzór na liczbę D_n, gdzie $n \geqslant 1$, nieporządków zbioru n-elementowego.
2. Liczba Catalana – jedna, starannie opisana interpretacja kombinatoryczna i wzór rekurencyjny.
3. Wzór na liczbę rozwiązań równania $x_1 + ... + x_k = n$, gdzie $n, k \geqslant 1$, w liczbach naturalnych dodatnich.
4. Lemat Burnside'a, podający wzór na liczbę orbit danej grupy przekształceń skończonego zbioru.
5. Czy istnieje drzewo o 5 wierzchołkach następujących stopni: 1, 1, 2, 3, 3 ?
6. Czy dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 3$ graf K_n jest grafem Eulera?
7. Wzór na liczbę drzew spinających grafu K_n.
8. Czy istnieje spójny graf planarny o 5 wierzchołkach i 10 krawędziach?
9. Czy graf o 9 krawędziach może mieć liczbę chromatyczną 5?
10. System różnych reprezentantów ciągu zbiorów $(A_1, \ldots, A_n)$ i twierdzenie Halla o jego istnieniu.

Egzamin z matematyki dyskretnej

23 czerwca 2023 r.

Część zadaniowa

Zadanie 1. Udowodnij, znajdując interpretację kombinatoryczną, że dla dowolnych liczb naturalnych $n > 0$, $m > 1$ zachodzi tożsamość

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 m^k = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \binom{2n-j}{n} (m-1)^j.$$

Zadanie 2. Znajdź wzór (może być w postaci sumy), wyrażający, dla ustalonej liczby naturalnej $n \geqslant 1$, liczbę wszystkich ciągów binarnych $(a_1, \ldots, a_{3n})$ długości $3n$ takich, że dla każdej uporządkowanej trójki (c_1, c_2, c_3), gdzie $c_i \in \{0,1\}$, istnieje liczba $k \in [n]$ taka, że $(c_1, c_2, c_3) = (a_{3k-2}, a_{3k-1}, a_{3k})$.

Zadanie 3. Ile różnych chodników długości $n \geqslant 1$ można ułożyć za pomocą n kwadratowych płyt 1×1, mając do dyspozycji nieograniczony zapas takich płyt w kolorach białym, niebieskim i czerwonym tak, by żadne dwie czerwone płyty nie leżały obok siebie?

Zadanie 4. Drzewo ukorzenione to para uporządkowana (T, v_T), gdzie T jest drzewem, a v_T – wyróżnionym wierzchołkiem drzewa T. Las drzew ukorzenionych to zbiór złożony z jednego lub więcej drzew ukorzenionych o parami rozłącznych zbiorach wierzchołków. Zbiór wierzchołków lasu ukorzenionego to suma zbiorów wierzchołków wszystkich jego drzew. Wyznacz liczbę wszystkich lasów ukorzenionych o zbiorze wierzchołków $[n]$, gdzie $n \geqslant 1$.

Zadanie 5. Wszystkie krawędzie dowolnego grafu pełnego pokolorowano: każdą krawędź kolorem czerwonym lub niebieskim. Udowodnij, że istnieje kolor taki, że każde dwa wierzchołki można połączyć trasą o krawędziach tego koloru długości co najwyżej 3.

Prosimy o napisanie rozwiązania każdego zadania na **oddzielnej**, **czytelnie podpisanej** *kartce.*